Ejercicio 1 Junio (mod6) 2020 (Análisis)

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$ para $x \neq 1, -1$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. (1'25 puntos)
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. (1'25 puntos)

Solución

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$ para $x \neq 1, -1$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

x = a es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si $\lim_{x\to a^+} [\,(f(x)\,] = \infty$
Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H). (Si "f" y "g" son funciones continuas en $[a - \delta, a + \delta]$, derivables en $(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. La regla se puede reiterar, y también es válida si tenemos ∞/∞, y si $x\to\infty$), con lo

Como $\lim_{x\to -1^-} \left(\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \right) = \left\{ \dfrac{0}{0^-}; L'H \right\} = \lim_{x\to -1^-} \left(\dfrac{2x - 2}{2x} \right) = \dfrac{-4}{-2} = 2$; la recta **x = -1 no es una A.V.** de la gráfica de f(x), es decir **la gráfica de f tiene en x = -1 un punto de discontinuidad evitable cuyo verdadero valor en x = -1 es 2.**

Como $\lim_{x\to 1^-} \left(\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \right) = \dfrac{-4}{0^-} = +\infty$; la recta **x = 1 es una A.V.** de la gráfica de f(x).

Posición relativa $\lim_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \right) = \dfrac{-4}{0^+} = -\infty$.

Como la función f es un cociente de funciones polinómicas, con igual grado numerador y denominador, f(x) tiene una asíntota horizontal (A.O.) en $\pm\infty$. Como hay A.H en $\pm\infty$, f no tiene asíntotas oblicuas (A.H.) en $\pm\infty$.

Como $\lim_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2} \right) = \lim_{x\to\pm\infty} (1) = 1$; la recta **y = 1 es una A.H.** de la gráfica de f(x).

Como $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} - 1 \right) = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.H. en $+\infty$ (le damos a x el valor + 100)

Como $\lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} - 1 \right) = 0^+$, f(x) está por encima de la A.H. en $-\infty$ (le damos a x el valor - 100)

Si hay es este caso A.H no hay asíntotas horizontales (A.O.)
b)
Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x)

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \dfrac{(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}$;

$f'(x) = \dfrac{(2x - 2)\cdot(x^2 - 1) - (x+1)(x-3)(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{2\cdot(x+1)\cdot[(x - 1)\cdot(x - 1) - (x-3)(x)]}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{2\cdot(x+1)\cdot[x^2 - 2x + 1 - x^2 + 3x]}{(x^2 - 1)^2} =$

$= \dfrac{2\cdot(x + 1)\cdot[x + 1]}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{2\cdot(x + 1)^2}{(x^2 - 1)^2}$.

Si $f'(x) = 0 \to 2(x + 1)^2 = 0 \to$ **x = -1** (doble), que **será el posible extremo relativo**. **No lo es porque en x = -1 f no está definida**.

Como f '(-2) = (+) /(+) > 0, luego f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty, -1)$

Como f '(0) = (+) /(+) > 0, luego f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-1, +\infty) - \{-1, 1\}$.

Luego f es estrictamente creciente en su dominio $(\nearrow)$ R - {-1, 1}.

Ejercicio 2 Junio (mod6) 2020 (Análisis)

Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = x\cdot e^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale 1/9. (2'5 puntos)

Solución

Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = x\cdot e^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale 1/9.

La función $f(x) = x\cdot e^{3x}$ se anula en x = 0 solamente porque e^{3x} siempre es positiva, por tanto para x > 0, f(x) es positiva, luego al ser a > 0, **área = 1/9 =** $\int_0^a x\cdot e^{3x}dx = \{**\} = [\,(1/3)\cdot e^{3x}\cdot(x - 1/3)\,]_0^a =$

$= [\,(1/3)\cdot e^{3a}\cdot(a - 1/3)\,] - [\,(1/3)\cdot e^{0}\cdot(0 - 1/3)\,] = (1/3)\cdot a\cdot e^{3a} - (1/9)\cdot e^{3a} + (1/9)$.

De **1/9 =** $(1/3)\cdot a\cdot e^{3a} - (1/9)\cdot e^{3a} + (1/9)$ **= $(1/3)\cdot e^{3a}\cdot(a - (1/3)) + (1/9)$** $\rightarrow$ $(1/3)\cdot e^{3a}\cdot(a - (1/3)) = 0$, como $(1/3)\cdot e^{3a}$ siempre es positivo tenemos $a - (1/3) = 0$, **de donde a = 1/3.**

{}** por partes $\int x\cdot e^{3x}dx = \left\{\begin{matrix} u=x & \Rightarrow du=dx \\ dv=e^{3x}dx & \Rightarrow v=\int e^{3x}dx=(1/3)e^{3x} \end{matrix}\right\} = x\cdot(1/3)e^{3x} - \int(1/3)e^{3x}dx = (1/3)x\cdot e^{3x} - (1/9)\cdot e^{3x} + K.$

Ejercicio 3 Junio (mod6) 2020 (Algebra)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Estudia el rango de A según los valores de m. (1'5 puntos)
b) Para m = 2, calcula la inversa de 2020A. (1 punto)

Solución

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Estudia el rango de A según los valores de m.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= m(-m-1-m-2) - 0 + 5(1-0) = -2m^2 - 3m + 5$.

De $-2m^2 - 3m + 5 = 0 = 2m^2 + 3m - 5 = 0 \rightarrow m = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \dfrac{-3 \pm 7}{4}$, de donde m = 1 y m = -10/4 = = - 5/2.

Si $m \neq 1$ y $m \neq -5/2$, $|A| \neq 0$, rango(A) = 3.
Si m = 1 y m = -5/2, **rango(A) < 3.**

Si nos fijamos en $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$, vemos que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, **luego rango(A) = 2.**

b)
Para m = 2, calcula la inversa de 2020A. (1 punto)

Sabemos que si $k \neq 0$, $(k\cdot A)^{-1} = \dfrac{1}{k}\cdot A^{-1} = \dfrac{1}{k\cdot|A|}\cdot Adj(A^t)$.

En nuestro caso para m = 2, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$|A| = -2(2)^2 - 3(2) + 5 = -9$. (Hemos utilizado la expresión de |A| obtenida en el aparatado (a))

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & +1 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$(2020\cdot A)^{-1} = \frac{1}{2020}\cdot A^{-1} = \frac{1}{2020\cdot(-9)}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & +1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{18180}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & +1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 Junio (mod6) 2020 (Geometría)

Siendo $a \neq 0$, considera las rectas $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a}$ y $s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

(a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a. (1'25 puntos)
(b) Para a = 2, determinas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas. (1'25 puntos)

Solución

Siendo $a \neq 0$, considera las rectas $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a}$ y $s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

(a)
Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a.

De r un punto es A(1,2,1) y un vector director es **u** = (1, 1, a).

De s un punto es B = (3, 3, -1) y un vector director **v** = (-a, -1, 2). Además **AB** = (3-1, 3-2, -1-1) = (2, 1, -2).

Estudiamos la proporcionalidad de los vectores **u** y **v**.

De 1/-a = 1/-1 = a/2, tenemos 1/-a = 1/-1 → a = 1 y 1/-1 = a/2 → a = -2

Si **a = 1**, **u** = (1, 1, 1) y **v** = (-1, -1, 2), que no son proporcionales, luego **r y s no son paralelas** y tenemos que estudiar el determinante det(**AB**,**u**,**v**). Si es cero se cortan y si es distinto de cero se cruzan

Como det(**AB**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{F_3+F_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= 0 - 0 + 3\cdot(2-1) = 3 \neq 0$, **las rectas r y s se cruzan.**

Si **a = -2**, **u** = (1, 1, -2) y **v** = (2, -1, 2), que no son proporcionales, luego **r y s no son paralelas** y tenemos que estudiar el determinante det(**AB**,**u**,**v**). Si es cero se cortan y si es distinto de cero se cruzan.

Como det(**AB**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{F_3+F_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila = 0, por tener una fila de ceros, luego **las rectas r y s se cortan.**

Variante de Joaquín

Comprobar si las rectas son coplanarias con det(**AB**,**u**,**v**) = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 2 \end{vmatrix}_{F_3+F_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a \\ 2-a & 0 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila =

= +(2-a)(a+2) – 0 + 0 = (2-a)(a+2), que se anula para a = ±2, luego si **a = ±2 las rectas son coplanarias y se cortan en un punto (**calculado en el aparatado (b) para a = 2**)**
Si a ≠ ±2 las rectas se cruzan en el espacio.

(b)
Para a = 2, determinas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas.

Si **a = 2**, **u** = (1, 1, 2) y **v** = (-2, -1, 2), que no son proporcionales, luego **r y s no son paralelas** y tenemos que estudiar el determinante det(**AB**,**u**,**v**). Si es cero se cortan y si es distinto de cero se cruzan

Como det(**AB**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{C_3+C_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera columna = 0 – 3(-2+2) + 0 = 0, **las rectas r y s se cortan.**

Para calcular el punto de corte de r y s ponemos ambas recta en paramétricas con parámetro distinto e igualamos x = x, y = y, z = z para obtener los parámetros y el punto.

Si **a = 2**, de r A(1,2,1) y **u** = (1, 1, 2). De s B = (3, 3, -1) y **v** = (-2, -1, 2).

Tenemos en paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + m \\ y = 2 + m \\ z = 1 + 2m \end{cases}$ y $r \equiv \begin{cases} x = 3 - 2n \\ y = 3 - n \\ z = -1 + 2n \end{cases}$ con m, n $\in$ R.

Igualando x = x, y = y, z = z, $\begin{cases} 1 + m = 3 - 2n \\ 2 + m = 3 - n \\ 1 + 2m = -1 + 2n \end{cases}$. Resolvemos dos ecuaciones y comprobamos que verifica la tercera.

$\begin{cases} 1 + m = 3 - 2n \\ 2 + m = 3 - n \quad (E_2 - E_1) \end{cases} \approx \begin{cases} 1 + m = 3 - 2n \\ 1 + 0 = 0 + n \end{cases}$, de donde **n = 1 y m = 0,** que verifica la tercera ecuación.

El punto de corte de r y s para a = 2 es Q(1 + (0), 2 + (0), 1 + 2(0)) = Q(1, 2, 1)

Para la recta t que me piden su vector director **w** el producto vectorial (x) de los vectores directores de cada resta, es decir **w = u**x**v** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = **i**(2+2) – **j**(2+4) + **k**(-1+2) = (4, -6, 1), por tanto **la recta pedida t en forma vectorial es t ≡ (x, y, z) = (1 + 4p, 2 – 6p, 1 + p) con p $\in$ R.**

Ejercicio 5 Junio (mod6) 2020 (Análisis)

Sea f : [0, 2π] → R la función definida por $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{2 - \cos(x)}$.

a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde de obtienen y valores que se alcanzan). (2 puntos)
b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráficas de f en el punto de abscisas x=π/3. (0'5 puntos)

Solución

Sea f : [0, 2π] → R la función definida por $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{2 - \cos(x)}$.

a)
Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde de obtienen y valores que se alcanzan).

Sabemos que los extremos absolutos se encontrarán en x = 0, x = 2π (extremos del intervalo) y las soluciones de f '(x) = 0.

Tenemos $f(0) = \dfrac{\text{sen}(0)}{2 - \cos(0)} = 0/1 = 0$, $f(2\pi) = \dfrac{\text{sen}(2\pi)}{2 - \cos(2\pi)} = 0/1 = 0$.

$f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{2 - \cos(x)}$, $\quad f'(x) = \dfrac{\cos(x)\cdot(2 - \cos(x)) - \text{sen}(x)\cdot(-(-\text{sen}(x))}{(2 - \cos(x))^2} = \dfrac{2\cos(x) - \cos^2(x) - \text{sen}^2(x)}{(2 - \cos(x))^2} = \dfrac{2\cos(x) - 1}{(2 - \cos(x))^2}$,

pues por la fórmula fundamental de la trigonometría $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

De f '(0) = 0 tenemos 2cos(x) - 1 = 0 → cos(x) = 1/2 → x = arcos(1/2) = π/3, pero el coseno también es positivo en el cuarto cuadrante por tanto también x = 2π - π/3 = 5π/3.

Como $f'(\pi/4) = \dfrac{2\cos(\pi/4) - 1}{(2 - \cos(\pi/4))^2} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{(+)} > 0$, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (0, π/3).

Como $f'(\pi) = \dfrac{2\cos(\pi) - 1}{(2 - \cos(\pi))^2} = \dfrac{-3}{(+)} < 0$, f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (π/3, 5π/3).

Como f '(7π/4) = $\dfrac{2\cos(7\pi/4) - 1}{(2 - \cos(7\pi/4))^2} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{(+)} > 0$, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (5π/3, 2π).

Por definición x = π/3 es un máximo relativo que vale $f(\pi/3) = \dfrac{\text{sen}(\pi/3)}{2 - \cos(\pi/3)} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{2 - 1/2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cong 0'577$, por tanto **x = π/3 es un máximo absoluto de f que vale f(π/3) = √(3) / 3.**

Por definición x = 5π/3 es un mínimo relativo que vale $f(5\pi/3) = \dfrac{\text{sen}(5\pi/3)}{2 - \cos(5\pi/3)} = \dfrac{-\sqrt{3}/2}{2 - 1/2} = \dfrac{-\sqrt{3}}{3} \cong -0'577$, por tanto **x = 5π/3 es un mínimo absoluto de f que vale f(5π/3) = - √(3) / 3.**

b)

Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráficas de f en el punto de abscisas x=π/3. (0'5 puntos)

La recta tangente en x = π/3 es "y – f(π/3) = f '(π/3)(x - π/3)"

La recta normal en x = π/3 es "y – f(π/3) = (-1/ f '(π/3))(x - π/3)".
Tenemos f(π/3) = √(3) / 3 y f '(π/3) = 0 (anulaba la primera derivada).

Luego **la recta tangente en x = π/3 es "y – √(3)/3 = 0" es decir la recta horizontal y = √(3) / 3.**

La recta normal en x = π/3 es "y – √(3)/3 = (-1/0)(x - π/3)" → 0 = -1(x - π/3), **es decir la recta vertical x = π/3.**

Ejercicio 6 Junio (mod6) 2020 (Análisis)

Sea f la función dada por $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4}{(x - 2)^2}$ para $x \neq 2$.

a) Calcula $\int f(x)dx$. (2 puntos)
b) Calcula la primitiva de f que pasa por el punto (3, 5). (0'5 puntos)

Solución

Sea f la función dada por $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4}{(x - 2)^2} = \dfrac{3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4}$ para $x \neq 2$.

a) Calcula $\int f(x)dx$. (2 puntos)

Tenemos $F(x) = \int \dfrac{3x^2 + 4}{(x - 2)^2} \cdot dx = \int \dfrac{3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4} \cdot dx$, que es una integral racional.

Como el numerador es de grado mayor o igual que el denominador tengo que realizar la división entera primero:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 4 & x^2-4x+4 \\ \hline -3x^2 + 12x - 12 & 3 \\ \hline 12x - 8 & \end{array}$$

$$F(x) = \int \frac{3x^2 + 4}{(x - 2)^2} dx = \int (\text{Cociente})dx + \int \frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}} dx = \int (3)dx + \int \frac{12x-8}{(x-2)^2} dx = x + I_1$$

$$I_1 = \int \frac{12x - 8}{(x - 2)^2} \cdot dx = \{\text{Una doble (2)}\} = \int \frac{A}{x-2} dx + \int \frac{B}{(x-2)^2} dx = A \cdot \ln|x - 2| - \frac{B}{x - 2} = \{++\} = 1 \cdot \ln|x - 2| - \frac{16}{x - 2}$$

{++} Calculamos A y B

$$\frac{12x-8}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2) + B}{(x-2)^2}$$

Igualando numeradores:
12x - 8 = A(x - 2) + B. Sustituimos "x" por el valor de las raíces del denominador, y le damos otro valor.
Para x = 2, tenemos 16 = B, de donde B = 16.
Tomo x = 0, tenemos -8 = A(-2) + 16, de donde 2A = 24, es decir A = 12.

Luego $F(x) = \int \dfrac{3x^2 + 4}{(x - 2)^2} dx = 3x + I_1 = 3x + 12 \cdot \ln|x - 2| - \dfrac{16}{x - 2} + K$.

b)

Calcula la primitiva de f que pasa por el punto (3, 5).

De $F(x) = \int \dfrac{3x^2 + 4}{(x - 2)^2} dx = 3x + 12 \cdot \ln|x - 2| - \dfrac{16}{x - 2} + K$, como F(3) = 5 tenemos

$5 = 3(3) + 12\cdot\ln|1| - \dfrac{16}{1} + K \rightarrow K = 12$ y $\mathbf{F(x) =} 3x + 12\cdot\ln|x-2| - \dfrac{16}{x-2} + 12$.

Ejercicio 7 Junio (mod6) 2020 (Algebra)

(2'5 puntos) Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Discute el sistema dado por AX = B, según los valores del parámetro a. (1'25 puntos)
b) Para a = 0, resuelve el sistema dado por AX = B. Calcula si es posible, una solución en la que y + z = 4. (1'25 puntos)

Solución

(2'5 puntos) Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Discute el sistema dado por AX = B, según los valores del parámetro a.

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 2a \\ 4 & 1 & 4 & 3a \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

En A como tiene dos columnas iguales |A| = 0, luego rango(A) < 3. Además de $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, **rango(A) = 2.**

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2a \\ 4 & 1 & 3a \end{vmatrix}_{F_3-F_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2a \\ 3 & 0 & 2a \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda columna $= -1(2a - 6a) + 0 - 1 = 4a$.

Luego **si $a \neq 0$, rango(A*) = 3**

Si $a \neq 0$, rango(A) = 2 $\neq$ rango(A*) = 3, por el Teorema de Rouche, el **sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si a = 0, tenemos **rango(A) = rango(A*) = 2** < número de incógnitas, por el Teorema de Rouche, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, (más de una).

b)
Para a = 0, resuelve el sistema dado por AX = B. Calcula si es posible, una solución en la que y+z=4.

Como el rango es 2, sólo necesitamos dos ecuaciones. Utilizo la primera y la segunda:

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x \quad + \quad z = 0 \end{cases}$. Tomando $z = m \in \mathbb{R}$, tenemos $x = -m$ y $(-m) + y + (m) = 0$, de donde $y = 0$.

La solución del sistema es (x, y, z) = (-m, 0, m) con $m \in \mathbb{R}$.

Preguntan si es posible, una solución en la que y + z = 4, es decir (0) + (m) = 4, **de donde m = 4** y **la solución es (x, y, z) = (-4, 0, 4).**

Ejercicio 8 Junio (mod6) 2020 (Geometría)

(2'5 puntos) Se considera el punto A(1, -2, 0) y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$.

(a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r. (1'25 puntos)
(b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r. (1'25 puntos)

Solución

(2'5 puntos) Se considera el punto A(1, -2, 0) y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$.

(a)
Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

Ponemos la recta r en vectorial con $z = m \in R$, $y = -2 + 3m$ y $x = -(-2 + 3m) = 2 – 3m$, es decir:
$R \equiv (x, y, z) = (2 - 3m, -2 + 3m, m)$ con $m \in R$. Un punto de la recta r es el B(2, -2, 0) y un vector director de r es **u** = (-3, 3, 1).

Como el plano π es perpendicular a la recta r el vector normal del plano **n** coincide con el vector director de la recta **u**, luego **n** = **u** = (-3, 3, 1).
Un plano paralelo al pedido es $-3x + 3y + z + K = 0$, como pasa por A(1, -2, 0) $\rightarrow$ $-3(1) + 3(-2) + (0) +K= 0$, de donde K = 9 y **el plano pedido es $\pi \equiv -3x + 3y + z + 9 = 0$**
(b)
Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.
En este caso para el plano π' necesitamos un punto, el A y dos vectores el **u** y el **AB** = (1, 0, 0).

$$\pi' \equiv \det(\mathbf{AX},\mathbf{u},\mathbf{AB}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (x-1)(0-0) - (y+2)(0-1) + z(0-3) = 0 = \mathbf{y - 3z + 2 = 0.}$$